Full Ext-exceptional collections for acyclic quivers

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻　大谷 拓己
Takumi Otani
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

概要

三角圏の構造を理解する上で，三角圏を “単純なもの” に分解する方法は有用である．有界 t-構造や例外生成列は，それぞれある種の三角圏の分解を与える．これらの分解は，三角圏の表現論的性質を研究する上でも重要である．本講演では，非輪状箙の導来圏に対して，有界 t-構造と整合的な例外生成列の存在性についての結果 [O] を紹介する．応用として，Bridgeland 安定性条件 σ に対する σ-例外生成列の存在性について解説する．

1　導入

例外生成列をもつ三角圏は，表現論・代数幾何学・シンプレクティック幾何学など多くの分野で登場する．例外生成列は，それぞれの分野に重要かつ豊富な表現論的問題を提供してきた．本講演では，Ext-例外生成列（定義 3.2）とそれに関わる問題を中心に取り扱う．Macrìは，Ext-例外生成列が有界 t-構造の核を定めることを証明した [M]．この命題の逆の問題「有界 t-構造の核が，いつ Ext-例外生成列により与えられるか？」を考える．

論文 [O] では，非輪状箙 Q の導来圏の場合に，有界 t-構造と整合的な Ext-例外生成列の存在性について調べた．次の 2 つの条件をみたす非輪状箙 Q を考える：

(A1) 各 $i, j = 1, \dots, \mu$ に対して，$\#\{$ 頂点 i から頂点 j への矢 $\} \leq 1$ が成立する．
(A2) $i, j, k = 1, \dots, \mu$ が $i < j < k$ をみたすとする．i から j への矢と j から k への矢が存在するならば，i から k への矢は存在しない．

Dynkin 箙及び $A^{(1)}_{1,1}$ と $A^{(1)}_{1,2}$ を除く拡大 Dynkin 箙は，条件 (A1)，(A2) をみたす非輪状箙 Q のクラスである．一方で，$A^{(1)}_{1,1}$ と $A^{(1)}_{1,2}$ の場合は，Ext-例外生成列と有界 t-構造の研究が知られている（命題 4.6 参照）．

このような非輪状箙に対し，次を証明した：

定理 1.1 (定理 3.6)**.** Q を条件 *(A1)*，*(A2)* をみたす非輪状箙とする．導来圏 $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の核 $\mathcal{A}$ が，標準的核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ の単純傾斜の繰り返しで得られると仮定する．このとき，*Ext*-例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ で，$\mathcal{A} = \langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}}$ かつ $\mathrm{Sim}\, \mathcal{A} = \{E_1, \dots, E_\mu\}$ をみたすものが存在する．　□

この定理は，三角圏の安定性条件に応用される．Macrìの研究 [M] に基づき，Dimitrov–Katzarkov は三角圏の安定性条件 σ に付随する σ-例外列の概念を導入した．σ-例外生成列とは，σ-安定対象からなる Ext-例外生成列であり，フェイズが長さ 1 の区間に収まるようなものである（定義 4.5 参照）．三角圏が例外生成列を持ったとしても，安定性条件 σ の σ-例外生成列が存在するとは限らない．そのため，σ-例外生成列の存在性は非自明な問題である．定理 1.1 により，導来圏 $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の安定性条件 σ に対する σ-例外生成列の存在が得られる：

定理 1.2 (定理 4.7)**.** Q を条件 *(A1)*，*(A2)* をみたす非輪状箙とし，σ を $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の安定性条件とする．ある $s \in \mathbb{C}$ が存在して，安定性条件 $s \cdot \sigma = (Z', \mathcal{A}')$ の核 $\mathcal{A}'$ が標準的核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ の単純傾斜の繰り返しで得られると仮定する．このとき，σ-例外生成列 $\mathcal{E}$ が存在する． □

Dynkin 箙 $\vec{\Delta}$ の場合には，すべての安定性条件に対して σ-例外生成列の存在が示される．次の定理は，Dimitrov–Katzarkov による予想 [DK2, Conjecture 7.1] を肯定的に解決している．

定理 1.3 (定理 4.8)**.** $\vec{\Delta}$ を *Dynkin* 箙とする．任意の $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の安定性条件 σ に対して，σ-例外生成列 $\mathcal{E}$ が存在する． □

本稿は次のように構成されている．第 2 節では，三角圏の t-構造と単純傾斜に関する基本事項についての復習を行う．第 3 節では，Ext-例外生成列の定義と既知の結果を述べた後，研究 [O] の主結果を述べる．第 4 節では，主結果の三角圏の安定性条件に関する応用を紹介する．

記号法．本稿では，$\mathbb{C}$-線型かつ有限型な三角圏 $\mathcal{D}$ を考える．すなわち，任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して，$\mathbb{C}$-線形空間 $\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F[p])$ が有限次元となる三角圏 $\mathcal{D}$ を考える．

いくつか記号と言葉を用意する．各 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して，

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{D}}(E,F) \coloneqq \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E,F)[-p], \quad \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E,F) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F[p])$$

とあらわす．$\mathcal{D}$ の Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{D})$ であらわし，$K_0(\mathcal{D})$ の階数を $\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であらわす．

充満部分圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ が**拡大閉** (extension closed) であるとは，$\mathcal{D}$ 上の完全三角 $E \to F \to G$ に対して $E, G \in \mathcal{A}$ であるとき，$F \in \mathcal{A}$ となることである．充満部分圏 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{C}$ を含む最小の拡大閉包を $\langle \mathcal{C} \rangle_{\mathrm{ex}}$ であらわす．

本稿では，非輪状箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ に対し，$i > j$ のとき $\#\{i \to j \in Q_1\} = 0$ となるように頂点集合 $Q_0 = \{1, \ldots, \mu\}$ を選ぶ．道代数 $\mathbb{C}Q$ 上の有限生成右加群のなす導来圏を $\mathcal{D}^b(Q) \coloneqq \mathcal{D}^b\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ とあらわす．

2　三角圏の t-構造と単純傾斜

この節では，三角圏の t-構造と単純傾斜の定義をして，必要事項について簡単な復習を行う．

2.1　三角圏の t-構造

定義 2.1. 充満部分圏 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ が $\mathcal{D}$ 上の **t-構造** (t-structure) であるとは，次の 2 つの条件をみたすときをいう：

(i) $\mathcal{F}[1] \subset \mathcal{F}$ をみたす．

(ii) 任意の対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して，ある $F \in \mathcal{F}$ と $G \in \mathcal{F}^{\perp}$ が存在して $F \to E \to G$ が $\mathcal{D}$ 上の完全三角をなす．ただし，$\mathcal{F}^{\perp}$ は

$$\mathcal{F}^{\perp} \coloneqq \{G \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, G) = 0,\ F \in \mathcal{F}\}$$

で定義される $\mathcal{D}$ の充満部分圏である．

注意 2.2. 文献によっては，2 つの充満部分圏 $\mathcal{D}^{\leq 0} \coloneqq \mathcal{F}$, $\mathcal{D}^{\geq 0} \coloneqq \mathcal{F}^{\perp}[1]$ のなす組 $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ を t-構造と呼ぶことがある．

三角圏の t-構造が与えられたとき，その中心にある Abel 圏が考えられる．これは，三角圏の安定性条件においても重要な役割をなす．

定義 2.3. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{D}$ 上の t-構造とする．充満部分圏 $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^{\perp}[1]$ を t-構造 $\mathcal{F}$ の**核** (heart) とよぶ．簡単のため，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{D}$ 上の核と呼んだりもする．

命題 2.4. *t-構造 $\mathcal{F}$ の核 $\mathcal{A}$ は Abel 圏の構造をもつ．* □

上記の t-構造の定義では，$\mathcal{F} = \{0\}$ のようなものも含まれている．このような自明なものを避けるため，t-構造の有界性を定義する．

定義 2.5. $\mathcal{D}$ 上の t-構造 $\mathcal{F}$ が，

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[i] \cap \mathcal{F}^{\perp}[j]$$

をみたすとき，$\mathcal{F}$ は**有界** (bounded) であるという．

例 2.6. Q を非輪状箙とする．このとき，Abel 圏 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ は導来圏 $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の有界 t-構造の核となる．核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ を $\mathcal{D}^b(Q)$ の**標準的核** (standard heart) という．

核 $\mathcal{A}$ がアルティン的かつネーター的であるとき，$\mathcal{A}$ は**長さ有限** (of finite length) であるという．長さ有限な核 $\mathcal{A}$ は Jordan–Hörder 性をもつ．すなわち，任意の零でない対象 $A \in \mathcal{A}$ に対して，包含列 $0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = A$ で A_i/A_{i-1} が単純対象となるものが存在する．

2.2　単純傾斜

この節では，核の単純傾斜 (simple tilting) についての既知の結果をまとめる．単純傾斜とは，大雑把には，核の単純対象を用いて新たな核を構成する手続きのことである．以下では，Abel 圏

$\mathcal{A}$ の単純対象の同型類のなす集合を $\mathrm{Sim}\,\mathcal{A}$ であらわす．

$\mathcal{A}$ を $\mathcal{D}$ 上の核とし，$S \in \mathcal{A}$ を単純対象とする．充満部分圏 ${}^{\perp}S$ と $S^{\perp}$ を

$${}^{\perp}S \coloneqq \{E \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E, S) = 0\}, \quad S^{\perp} \coloneqq \{E \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S, E) = 0\}.$$

により定義し，$\mathcal{A}_S^{\sharp}$ と $\mathcal{A}_S^{\flat}$ を

$$\mathcal{A}_S^{\sharp} \coloneqq \langle S[1], {}^{\perp}S \rangle_{\mathrm{ex}}, \quad \mathcal{A}_S^{\flat} \coloneqq \langle S^{\perp}, S[-1] \rangle_{\mathrm{ex}}.$$

と定める．このとき，$\mathcal{A}_S^{\sharp}$ と $\mathcal{A}_S^{\flat}$ は $\mathcal{D}$ 上の核をなすことが知られている．$\mathcal{A}_S^{\sharp}$ を $\mathcal{A}$ の S による**前方単純傾斜** (forward simple tilt) といい，$\mathcal{A}_S^{\flat}$ を $\mathcal{A}$ の S による**後方単純傾斜** (backward simple tilt) という．

命題 2.7 ([KQ])**.** $\mathcal{A}$ を $\mathcal{D}$ 上の核とし，単純対象 $S \in \mathcal{A}$ は $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, S) \cong 0$ をみたすとする．また，$\mathrm{Sim}\,\mathcal{A}$ は有限集合であり，$\mathcal{A} = \langle \mathrm{Sim}\,\mathcal{A} \rangle_{\mathrm{ex}}$ であると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{Sim}\,\mathcal{A}_S^{\sharp} &= \{S[1]\} \cup \{\psi_S^{\sharp}(T) \mid T \in \mathrm{Sim}\,\mathcal{A},\ T \ncong S\}, \\ \mathrm{Sim}\,\mathcal{A}_S^{\flat} &= \{S[-1]\} \cup \{\psi_S^{\flat}(T) \mid T \in \mathrm{Sim}\,\mathcal{A},\ T \ncong S\}, \end{aligned}$$

が成立する．ここで，$\psi_S^{\sharp}(T)$ と $\psi_S^{\flat}(T)$ は次の完全三角により定義される対象である：

$$\psi_S^{\sharp}(T) \longrightarrow T \longrightarrow \mathrm{Hom}^1(T, S)^* \otimes S[1], \tag{2.1a}$$

$$\mathrm{Hom}^1(S, T) \otimes S[-1] \longrightarrow T \longrightarrow \psi_S^{\flat}(T). \tag{2.1b}$$

さらに，$\mathcal{A}_S^{\sharp} = \langle \mathrm{Sim}\,\mathcal{A}_S^{\sharp} \rangle_{\mathrm{ex}}$ と $\mathcal{A}_S^{\flat} = \langle \mathrm{Sim}\,\mathcal{A}_S^{\flat} \rangle_{\mathrm{ex}}$ が成立する． □

非輪状箙 Q の導来圏 $\mathcal{D}^b(Q)$ の場合に，単純傾斜した核における単純対象の構造は詳細に調べられている．

命題 2.8 ([KQ])**.** Q を非輪状箙とし，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の核とする．異なる 2 つの単純対象 $S, T \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{D}^b(Q)}(S, T)$ と $\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{D}^b(Q)}(T, S)$ は，唯一つの正の次数に集中する．さらに，$\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{D}^b(Q)}(S, T) \cong 0$ あるいは $\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{D}^b(Q)}(T, S) \cong 0$ が成立する． □

さらに，Dynkin 箙 $\vec{\Delta}$ の場合は，単純傾斜によりすべての核が得られることが知られている．

命題 2.9 ([KV] cf. [Q])**.** 任意の $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の核は，標準的核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}\vec{\Delta})$ の単純傾斜の繰り返しによって得られる． □

3　例外生成列

この節では，本稿の主役である Ext-例外生成列を導入し，基本事項について復習する．その後に，主結果について述べる．

3.1 例外生成列の定義と性質

まずは例外生成列を定義する．

定義 3.1. (i) 対象 $E \in \mathcal{D}$ が

$$\mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E, E) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0, \end{cases}$$

をみたすとき，E を $\mathcal{D}$ の**例外対象** (exceptional object) と呼ぶ．

(ii) 例外対象からなる順序集合 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ が，$i > j$ に対して

$$\mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E_i, E_j) \cong 0, \quad p \in \mathbb{Z},$$

をみたすとき，$\mathcal{E}$ を**例外列** (exceptional collection) という．

(iii) 例外列 $\mathcal{E}$ を含む最小の充満部分三角圏が $\mathcal{D}$ と同値になるとき，$\mathcal{E}$ は**例外生成列** (full exceptional collection) であるという．

Abel 圏 $\mathcal{A}$ が与えられたとき，その導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ において

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{A}}(E, F) \cong \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(E, F), \quad E, F \in \mathcal{A},$$

が成立する．この意味で，Ext のみが残っている例外列を考える．この概念は，有界 t-構造と例外生成列を関連させる上で重要となる．

定義 3.2. 例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ が **Ext** であるとは，任意の i, j に対して

$$\mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E_i, E_j) \cong 0, \quad p \leq 0,$$

をみたすときをいう．

$\mathcal{D}$ は有限型な三角圏であるため，任意の例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ に対し，適当に $p = (p_1, \dots, p_\mu) \in \mathbb{Z}^\mu$ をとることで $\mathcal{E}[p] := (E_1[p_1], \dots, E_\mu[p_\mu])$ は Ext-例外生成列とすることができる．

例 3.3. Q を非輪状箙とする．このとき，各頂点 $i \in Q_0$ に対応する単純対象 $S_i \in \mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ は

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{C}Q}(S_i, S_j) = \#\{i \to j \in Q_1\}$$

を満たし，さらに $(S_1, \dots, S_\mu)$ は Ext-例外生成列をなす． □

次の Macrìによる結果は，Ext-例外生成列を有界 t-構造に対応させる重要な結果である．

命題 3.4 ([M])**.** $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ を $\mathcal{D}$ 上の *Ext*-例外生成列とする．このとき，$\langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}}$ は有界 t-構造の核をなす．さらに，$\langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}}$ は長さ有限であり，$\mathrm{Sim}\, \langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}} = \{E_1, \dots, E_\mu\}$ である． □

注意 3.5. Ext-例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_\mu)$ の順序付けを忘れることで，集合 $\{E_1, \ldots, E_\mu\}$ は **simple-minded system** [*1] を定める．有限次元代数の導来圏において，simple-minded system と長さ有限の有界 t-構造は 1 対 1 対応することが知られている [KY].

3.2　主結果

非輪状箙 Q に対して，次の 2 つの条件を考える：

(A1) 各 $i, j = 1, \ldots, \mu$ に対して，$\#\{i \to j \in Q_1\} \leq 1$ が成立する．

(A2) $i, j, k = 1, \ldots, \mu$ が $i < j < k$ をみたすとする．i から j への矢と j から k への矢が存在するならば，i から k への矢は存在しない．

条件 (A1)，(A2) は技術的な条件ではあるが，Dynkin 箙及び $A_{1,1}^{(1)}$ と $A_{1,2}^{(1)}$ を除く拡大 Dynkin 箙を含む広いクラスである．一方で，$A_{1,1}^{(1)}$ と $A_{1,2}^{(1)}$ の場合は，Ext-例外生成列と有界 t-構造の研究が知られている（命題 4.6 参照）．次の定理が研究 [O] における主結果である．

定理 3.6 ([O])**.** Q を条件 *(A1)*，*(A2)* をみたす非輪状箙とする．導来圏 $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の核 $\mathcal{A}$ が，標準的核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ の単純傾斜の繰り返しで得られると仮定する．このとき，*Ext*-例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_\mu)$ で，$\mathcal{A} = \langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}}$ かつ $\mathrm{Sim}\,\mathcal{A} = \{E_1, \ldots, E_\mu\}$ をみたすものが存在する．

証明の概略. 2 つのステップに分けて，帰納法によって証明する．

(Step 1) 標準的な核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ の場合に主張が成り立つことを示す．例 3.3（と命題 3.4）を組み合わせることで，主張が得られる．

(Step 2) King–Qiu による結果（命題 2.7 と命題 2.8）を用いて，核 $\mathcal{A}$ の単純対象を適当に並べ替えることで Ext-例外生成列をなすことを証明する．正確には，核 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A} = \langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}}$ かつ $\mathrm{Sim}\,\mathcal{A} = \{E_1, \ldots, E_\mu\}$ をみたす Ext-例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_\mu)$ を持つときに，核 $\mathcal{A}^\sharp_{E_i}$ と核 $\mathcal{A}^\flat_{E_i}$ の主張をみたす Ext-例外生成列は（$\mathcal{E}$ を適切に並び替えたのちに）

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_i^\sharp &:= (E_1, \ldots, E_{i^\sharp - 1}, E_i[1], \psi^\sharp_{E_i}(E_{i^\sharp}), \ldots, \psi^\sharp_{E_i}(E_{i-1}), E_{i+1}, \ldots, E_\mu), \\
\mathcal{E}_i^\flat &:= (E_1, \ldots, E_{i-1}, \psi^\flat_{E_i}(E_{i+1}), \ldots, \psi^\flat_{E_i}(E_{i^\flat}), E_i[-1], E_{i^\flat + 1}, \ldots, E_\mu),
\end{aligned}
$$

によって与えられることを示す．ただし，$i^\sharp$ と $i^\flat$ は

$$
\begin{aligned}
i^\sharp &:= \min\{j \in \{1, \ldots, i\} \mid \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E_j, E_i) \not\cong 0,\ p \leq 1\}, \\
i^\flat &:= \max\{j \in \{i, \ldots, \mu\} \mid \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{D}}(E_i, E_j) \not\cong 0,\ p \leq 1\}.
\end{aligned}
$$

で定義される添え字である．条件 (A1)，(A2) は，$\mathcal{E}_i^\sharp$ と $\mathcal{E}_i^\flat$ が Ext-例外生成列になることの証明において必要となる． □

[*1] 研究 [KY] においては simple-minded collection と呼ばれている．本稿では，collection を順序付けされた集合として扱うため，ここでは simple-minded system と呼んでいる．

命題 2.9 と定理 3.6 を組み合わせることで，次の主張が得られる．

系 3.7 ([O])**.** $\vec{\Delta}$ を *Dynkin* 箙とする．任意の $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の核 $\mathcal{A}$ に対して，*Ext*-例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ で $\mathcal{A} = \langle \mathcal{E} \rangle_{\mathrm{ex}}$ かつ $\operatorname{Sim}\mathcal{A} = \{E_1, \dots, E_\mu\}$ をみたすものが存在する． □

4 応用：三角圏の安定性条件

この節では，定理 3.6 の応用を考える．三角圏の安定性条件は，代数幾何学における slope 安定性や，表現論における King 安定性の一般化である．安定性条件と相性の良い例外生成列の存在性について議論する．

まずは，安定性条件を定義するために必要な，核の上の安定関数を導入する．

定義 4.1 ([B1])**.** $\mathcal{A}$ を三角圏 $\mathcal{D}$ 上の有界 t-構造の核とする．$\mathcal{A}$ 上の**安定関数** (stability function) とは，群準同型 $Z\colon K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ で，零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{H}_-$ となるものである．ここで，$\mathbb{H}_- := \{re^{\sqrt{-1}\pi\phi} \in \mathbb{C} \mid r > 0,\ 0 < \phi \leq 1\}$ である．

零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ に対し，実数 $\phi(E) := (1/\pi)\arg Z(E) \in (0,1]$ を E の**フェイズ** (phase) とよぶ．零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ が，零でない部分対象 $A \subset E$ に対して $\phi(A) \leq \phi(E)$ をみたすとき，E は**半安定**であるという．また，$\phi(A) < \phi(E)$ をみたすときに，E は**安定**であるという．安定関数 $Z\colon K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ が，零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ に対して，フィルトレーション $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$ で F_i/F_{i-1} が半安定であり $\phi(F_1/F_0) > \phi(F_2/F_1) > \cdots > \phi(F_n/F_{n-1})$ を満たすものが存在するときに，**Harder–Narasimhan 条件**をみたすという．また，ある定数 $C > 0$ が存在して $\|E\| < C|Z(E)|$ がすべての $E \in \mathcal{A}$ で成立するとき，安定関数 Z は**台条件** (support condition) をみたすという．

定義 4.2 ([B1])**.** 三角圏 $\mathcal{D}$ 上の有界 t-構造の核 $\mathcal{A}$，$Z\colon K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathcal{A}$ 上の安定関数とする．安定関数 Z が Harder–Narasimhan 条件と台条件をみたすとき，組 $(Z, \mathcal{A})$ を三角圏 $\mathcal{D}$ 上の**安定性条件** (stability condition) という．

$\mathcal{D}$ 上の安定性条件全体がなす空間を $\operatorname{Stab}(\mathcal{D})$ であらわす．$\operatorname{Stab}(\mathcal{D})$ は複素多様体の構造を持つことが知られている [B1]．また，$\operatorname{Stab}(\mathcal{D})$ には $\mathbb{C}$-作用が存在する：

$$s \cdot (Z, \mathcal{A}) := (Z', \mathcal{A}'), \quad s \in \mathbb{C},\ (Z, \mathcal{A}) \in \operatorname{Stab}(\mathcal{D}),$$

ここで，

$$Z' := e^{-\pi\sqrt{-1}s} Z, \quad \mathcal{A}' := \left\langle E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 < \phi \leq 1 \\ E\ \text{はフェイズ}\ \phi + \operatorname{Re}(s)\ \text{の半安定対象} \end{matrix} \right\rangle_{\mathrm{ex}}$$

である．

一般に，三角圏の安定性条件が存在するかどうかは非自明である．代数的な条件下では，安定性条件の構成が比較的容易に構成される．$\mathcal{A}$ が長さ有限で単純対象が有限個しか持たないとき，任意

の安定関数は Harder–Narasimhan 条件及び台条件をみたすことが知られている．したがって，次の命題が成立する．

命題 4.3 ([B2])**.** $\mathcal{A}$ を有界 t-構造の核で，長さ有限であり単純対象が $S_1, \ldots, S_\mu$ で与えられるとする．このとき，次の同型が存在する：

$$\{(Z, \mathcal{P}) \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{P}((0,1]) \cong \mathcal{A}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}_-^\mu, \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto (Z(S_1), \ldots, Z(S_\mu)).$$

□

命題 3.4 と命題 4.3 を組み合わせることで，次が得られる．

系 4.4 ([M])**.** $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_\mu)$ を $\mathcal{D}$ 上の例外生成列とする．このとき，$E_1, \ldots, E_\mu$ が σ-安定となるような，$\mathcal{D}$ 上の安定性条件 σ が存在する． □

Macrìの研究 [M] に基づき，Dimitrov–Katzarkov は安定性条件 σ に対する σ-例外列の概念を導入した．

定義 4.5 ([DK1])**.** $\sigma \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ を安定性条件とする．例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_\mu)$ が，次の 3 条件をみたすとき，$\mathcal{E}$ を σ**-例外列**という：

(i) $E_1, \ldots, E_\mu$ は σ-（半）安定対象である．
(ii) $\mathcal{E}$ は Ext-例外列である．
(iii) ある $r \in \mathbb{R}$ が存在して，各 E_i は $r < \phi(E_i) \leq r+1$ を満たす．

安定性条件 σ に対して σ-例外生成列の存在するとは限らない．ℓ-Kronecker 箙 K_ℓ とアフィン $A_{1,2}^{(1)}$ 箙の場合に，σ-例外生成列の存在が研究されている：

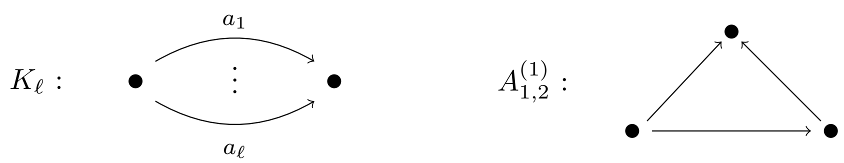

図 1　ℓ-Kronecker 箙 K_ℓ とアフィン $A_{1,2}^{(1)}$ 箙．

命題 4.6 ([M] for $Q = K_\ell$, [DK1] for $Q = A_{1,2}^{(1)}$)**.** Q を *ℓ-Kronecker* 箙 K_ℓ あるいはアフィン $A_{1,2}^{(1)}$ 箙とする．このとき，任意の $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の安定性条件 σ に対し，σ-例外生成列が存在する． □

定理 3.6 により，次の定理が得られる．

定理 4.7 ([O])**.** Q を条件 *(A1)*，*(A2)* をみたす非輪状箙とし，σ を $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の安定性条件とする．ある $s \in \mathbb{C}$ が存在して，安定性条件 $s \cdot \sigma = (Z', \mathcal{A}')$ の核 $\mathcal{A}'$ が標準的核 $\mathrm{mod}(\mathbb{C}Q)$ の単純傾斜の繰り返しで得られると仮定する．このとき，σ-例外生成列 $\mathcal{E}$ が存在する． □

とくに，Dynkin 箙 $\vec{\Delta}$ の場合には次が成立する．

定理 4.8 ([O])**.** *$\vec{\Delta}$ を Dynkin 箙とする．任意の $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の安定性条件 σ に対して，σ-例外生成列 $\mathcal{E}$ が存在する．* □

この定理は，Dimitrov–Katzarkov による予想を肯定的に解決している [DK2, Conjecture 7.1]. Dynkin 箙とアフィン $A^{(1)}_{1,1}, A^{(1)}_{1,2}$ の場合（命題 4.6，定理 4.8）に基づき，次が期待される．

予想 4.9. *Q を拡大 Dynkin 箙とする．任意の $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の安定性条件 σ に対して，σ-例外生成列 $\mathcal{E}$ が存在する．*

注意 4.10. 拡大 Dynkin 箙 Q の導来圏には $\mathcal{D}^b(Q)$ には，長さが有限ではないような有界 t-構造の核が存在する．このような核は，標準的核からの単純傾斜の（有限回の）繰り返しでは得られない．

参考文献

[BP] A. Bondal and A. Polishchuk, *Homological Properties of Associative Algebras: The Method of Helices*, Izv. RAN. Ser. Mat., 1993, Volume 57, Issue 2, 3-50 (Mi izv877).

[B1] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2), **166** (2) : 317-345, 2007.

[B2] T. Bridgeland, *Spaces of stability conditions*, Algebraic geometry-Seattle 2005. Part 1, 1–21, Proc. Sympos. Pure Math., **80**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[DK1] G. Dimitrov and L. Katzarkov, *Non-semistable exceptional objects in hereditary categories*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. **20**, 6293–6377.

[DK2] G. Dimitrov and L. Katzarkov, *Non-semistable exceptional objects in hereditary categories: some remarks and conjectures*, Stacks and categories in geometry, topology, and algebra, 263–287, Contemp. Math., **643**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[KV] B. Keller and D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, Bull. Soc. Math. Belg. **40** (1988), 239-253.

[KQ] A. King and Y. Qiu, *Exchange graphs and Ext quivers*, Adv. Math. **285** (2015), 1106–1154.

[KY] S. Koenig and D. Yang *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras*, Doc. Math. **19** (2014), 403-438.

[M] E. Macrì, *Stability conditions on curves*, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 4, 657–672.

[O] T. Otani, *Full exceptional collections and stability conditions for Dynkin quivers*, arXiv:2210.08479.

[Q] Y. Qiu, *Stability conditions and quantum dilogarithm identities for Dynkin quivers*, Adv. Math. **269** (2015), 220–264.